MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Prof. Dr. D. Rost

SoSe 2015
Blatt 7
31.05.2015

Tutorium zur Vorlesung „Lineare Algebra und analytische Geometrie II (Unterrichtsfach)“

1. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*

   Die Bilinearform $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

   $$\varphi(x,y) := 9x_1y_1 - 6x_1y_2 - 6x_2y_1 + 5x_2y_2 \quad \text{für} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

   Weisen Sie nach, dass φ ein Skalarprodukt ist.
   Hinweis:
   Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ symmetrisch und positiv definit ist. Der Nachweis kann entweder direkt mit Hilfe der Definition von φ gezeigt werden; alternativ können Sie die Matrix $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ bestimmen, so dass $\varphi(x,y) = x^TAy$ gilt. Benutzen Sie anschließend Lemma 9.6.

2. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002* Man zeige, dass durch

   $$\langle x,y \rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 5x_2y_2, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},\ y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2,$$

   eine positiv definite symmetrische Bilinearform, d.h. ein Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$ definiert ist.
   Hinweis:
   Die Notation $\langle x,y \rangle$ für ein Skalarprodukt wird in der Literatur häufig verwendet.

3. *Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*

   Gegeben sei die reelle 3×3–Matrix

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

   a) Zeigen Sie, dass durch

$$\sigma_B(x,y) := x^\top \cdot B \cdot y \qquad \text{für alle} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   ein Skalarprodukt σ_B auf dem reellen Vektorraum $\mathbb{R}^3$ definiert wird.

   b) Berechnen Sie den Cosinus des Winkels, den die beiden Vektoren

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

   bezüglich des in a) definierten Skalarprodukts σ_B einschließen.

4. Sei $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine invertierbare Matrix. Sei $A = B^T B$. Zeigen Sie, dass

$$\sigma_A : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\,, \sigma_A(x,y) := x^T A y$$

   ein Skalarprodukt auf dem reelen Vektorraum $\mathbb{R}^n$ definiert.
   Hinweis:
   Die Symmetrieeigenschaft ist ersichtlich (Wieso?). Sie müssen also noch zeigen, dass σ_A positiv definit ist. Überlegen Sie sich, wie Ihnen die Invertierbarkeit von B weiterhilft.